La funzione esponenziale

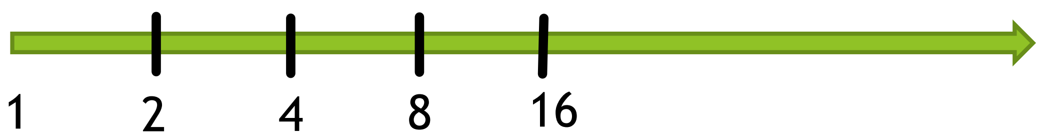
Un po’ di storia: i Babilonesi

- Su una tavoletta babilonese (2000 a.C.) appare il seguente problema:
- Un capitale di una mina, posto all’interesse del 20% dopo 5 anni raddoppia; se il capitale così raddoppiato si mette a frutto e dopo 5 anni si reinveste tutto il capitale raddoppiato e così via…., quale sarà il capitale accumulato dopo 6 lustri?

Lustri	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
Capitale	1	2	4	8	16	32	64	128	256	…

La funzione esponenziale

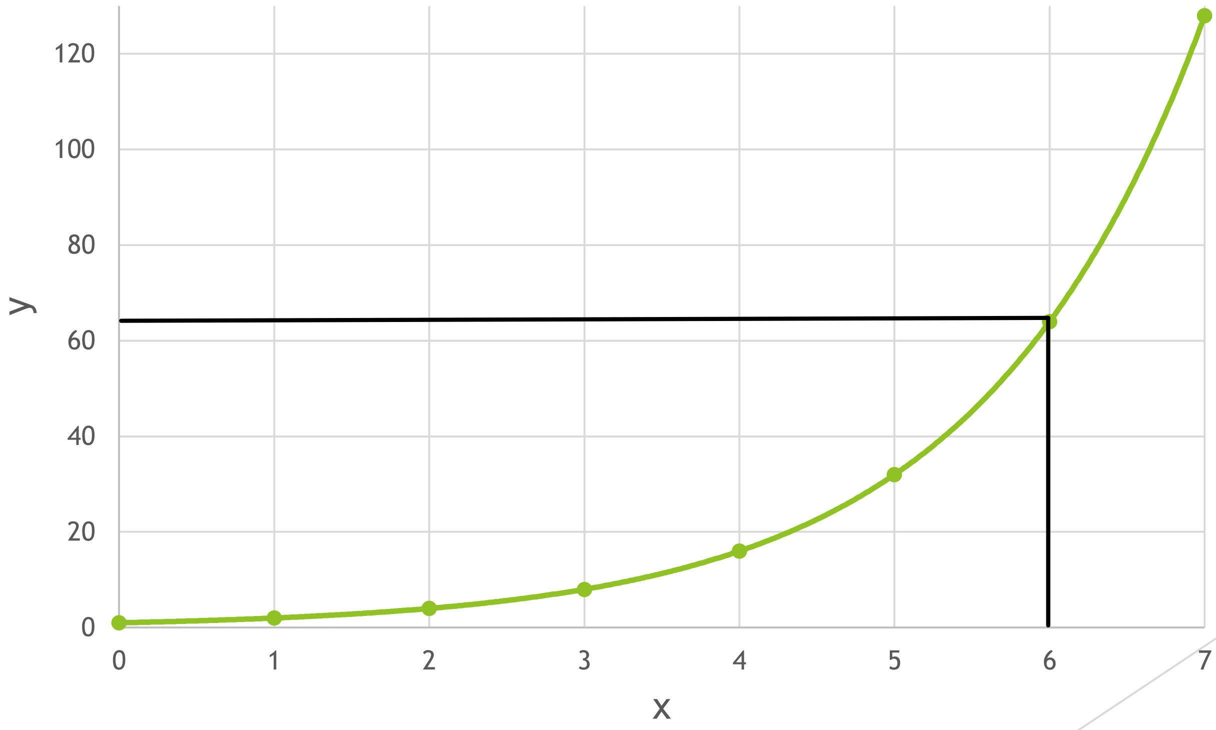
- M = C + I
  - M: montante, C: capitale iniziale, I: interesse fruttato
- M = C + C i t
  - i: tasso di interesse, t: tempo di deposito)
- M_1 = 1 + 1*0.2*5 = 2 (se reinvestiamo l'intero capitale)
- Se reinvestiamo l'intero capitale
  - M_2 = 2 + 2*0.2*5 = 4



- Dopo N lustri, avendo reinvestito l'intero capitale dopo ogni lustro, il capitale sarà:
  - $M_N = 2^N$ ….. dopo 6 lustri il capitale sarà 2^6 = 64 mine

La funzione esponenziale

- In forma analitica: $y = 2^x$ con x = numero di lustri e y = montante accumulato
- 2 è la **base** dell'esponenziale e x è **l'esponente**



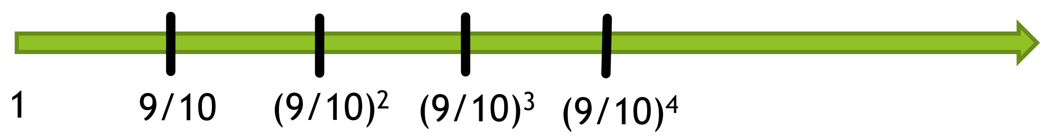
Esponenziale decrescente

- In un testo di Nicolas Chuquet del 1484 troviamo questo problema:
  - Una botte si svuota ogni giorno di un decimo del suo contenuto. Dopo quanto tempo il contenuto si sarà dimezzato?

Giorni	Liquido contenuto
Giorno 0	1
Giorno 1	0.9
Giorno 2	0.81
Giorno 3	0.729
Giorno 4	0.6561
Giorno 5	0.59049
Giorno 6	0.531441
Giorno 7	0.478297

Esponenziale decrescente

- $V_1 = V_0 - V_0\frac{1}{10} = V_0\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{10}V_0$
- $V_2 = V_1 - V_1\frac{1}{10} = V_1\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{10}\left(1 - \frac{1}{10}\right)V_0 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 V_0$
- $V_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n V_0$
- Se consideriamo V_0=1 allora:



Esponenziale decrescente

- In forma analitica: $y = \left(\frac{9}{10}\right)^x$ con x = numero di giorni e y= contenuto botte
  - $\frac{9}{10}$ è la base dell'esponenziale e x è l'esponente (0<base<1, funzione decrescente)
- $y = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^x = \frac{1}{2}$

Il numero di Nepero

- Ritornando all'esempio in campo finanziario:
- Se immaginiamo di investire in banca un certo capitale C_0, allora dopo un anno avremo:
  - $M_1 = C_0 + C_0 i$
- Ma se invece che capitalizzare i soldi dopo un anno volessi farlo dopo 6 mesi, allora avrei:
  - $M_{1/2} = C_0 + C_0 \frac{i}{2}$
- Per sapere quale montante avrò accumulato dopo 1 anno:
  - $M_{1/2} = C_0 + C_0 \frac{i}{2} = C_0 \left(1 + \frac{i}{2}\right)$
  - $M_1 = M_{1/2} + M_{1/2} \frac{i}{2} = M_{1/2} \left(1 + \frac{i}{2}\right) = C_0 \left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(1 + \frac{i}{2}\right) = C_0 \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2$

Il numero di Nepero

- Se invece voglio suddividere l'anno in n parti, allora il capitale accumulato a fine anno sarà:
  - $M = C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$
- Supponendo che il capitale iniziale sia unitario e i = 1 (100%)
  - $M = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
- Si potrebbe allora ingenuamente pensare che se il numero di intervalli in cui si suddivide l'anno tende ad infinito, il montante tenda anch'esso ad infinito, cioè:
  - $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$??????

Il numero di Nepero

- Invece otteniamo un numero irrazionale, cioè decimale illimitato aperiodico, indicato con e (numero di Nepero)
- John Napier (1550-1617) è stato un matematico, astronomo e fisico scozzese

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.25
3	2.37
4	2.44
5….	2.49
77	2.700
78	2.701
79	2.7013
80	2.7015
81	2.7017

2
2,7
2,71
2,718
2,7182
2,71828
2,718281
2,7182818
2,71828182
2,718281828
2,7182818284

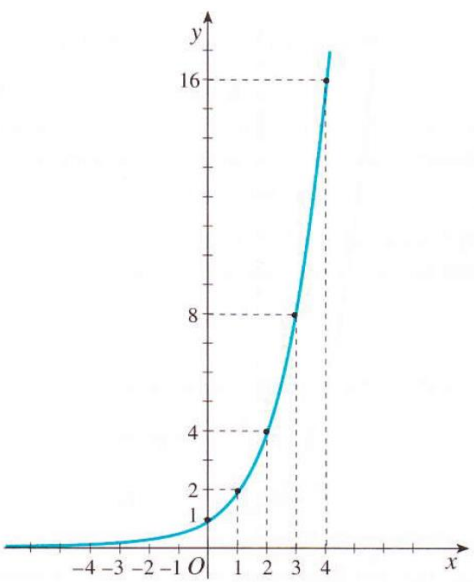
VALORI DI e E DI π A 1000 DECIMALI

e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759
45713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381
32328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149934884167509244
76146066808226480016847741185374234544243710753907774499206955170276183860626133
13845830007520449338265602976067371132007093287091274437470472306969772093101416
92836819025515108657463772111252389784425056953696770785449969967946864454905987
93163688923009879312773617821542499922957635148220826989519366803318252886939849
64651058209392398294887933203625094431173012381970684161403970198376793206832823
76464804295311802328782509819455815301756717361332069811250996181881593041690351
59888851934580727386673858942287922849989208680582574927961048419844436346324496
84875602336248270419786232090021609902353043699418491463140934317381436405462531
52096183690888707016768396424378140592714563549061303107208510383750510115747704
1718986106873969655212671546889570350354.

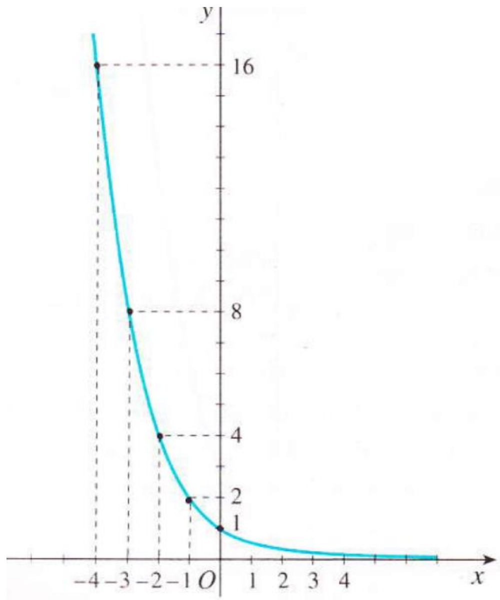
π = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899
86280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502
84102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165
27120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817
48815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094
33057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724
89122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277
05392171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091
73637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960
86403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859
50244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083
81420617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532
1712268066130019278766111959092164201989.

Riassumendo…

- Si chiama funzione esponenziale
- f: x -> a^x con a>0 e a≠1
- Se a = e (≈2.7>1):
  - $y = e^x$ (esponenziale crescente)
- Se a =1/e (≈0.3<1)
  - $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$ (esponenziale decrescente)



Funzione $f: x \to a^x$, $a > 1$
dominio: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
codominio: $\mathcal{C}_f = \mathbb{R}_0^+$
asintoto orizzontale:
$y = 0$ per $x \to -\infty$
crescente: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$,
$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$



Funzione $f: x \to a^x$, $0 < a < 1$
dominio: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
codominio: $\mathcal{C}_f = \mathbb{R}_0^+$
asintoto orizzontale:
$y = 0$ per $x \to +\infty$
decrescente: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$,
$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Un esempio attuale

Nuovi casi giorno per giorno (colonne gialle) e media mobile dei casi ogni 7 giorni (linea blu)